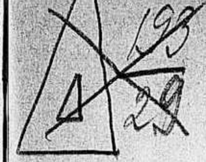


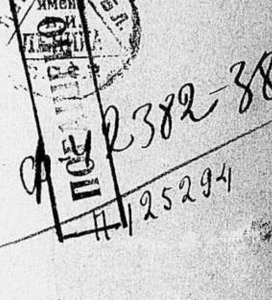
ИСТОРИЧЕСКІЙ ОЧЕРКЪ

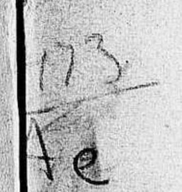
развитія

АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ.

Ординарнаго Профессора Императорскаго Университета Св. Владиміра

М. Е. Ващенко-Захарченко.





КІЕВЪ.

Типографія Императорскаго Университета Св. Владиміра.

1884.

Печатано по Опредѣленію Совѣта Императорскаго Университета Св. Владиміра.

Ректоръ *Н. Ренненкампфъ*.

Отъ автора.

Цѣль настоящей замѣтки представить, въ сжатомъ видѣ, постепенное развитіе Аналитической Геометріи, начиная отъ творца метода координатъ Декарта до настоящаго времени. Въ хронологическомъ порядкѣ мы укажемъ всѣ важнѣйшія сочиненія, касающіяся этого предмета. Говоря о развитіи Аналитической Геометріи необходимо будетъ упомянуть также и о развитіи Синтетической Геометріи, и отчасти Неевклидовской, которыя въ послѣднее время все болѣе и болѣе начинаютъ входить въ болѣе тѣсную связь съ Аналитической Геометріей.

При составленіи настоящей замѣтки мы, главнымъ образомъ, имѣли въ виду собрать въ одно цѣлое указанія, разсѣянныя въ различныхъ сочиненіяхъ, касающіяся историческаго развитія метода Декарта.

Мы полагаемъ, что попытка наша можетъ принесть нѣкоторую пользу лицамъ желающимъ познакомиться съ историческимъ ходомъ развитія различныхъ методовъ, входящихъ въ область Аналитической Геометріи. Въ нашей замѣткѣ читатель также найдетъ указанія на главнѣйшія сочиненія по Аналитической Геометріи, а также Геометріи Синтетической.

Мих. Ващенко-Захарченко.

Кіевъ, 15 Сентября,

1883 г.

Историческій очеркъ развитія Аналитической Геометріи.

Первоначальныя основы Аналитической Геометріи были положены знаменитымъ французскимъ математикомъ XVI вѣка *Віетомъ* (1540—1603 г.). Онъ первый сдѣлалъ нововведеніе въ тогдашнюю Алгебру, введя въ нее символы и показавъ какъ при помощи ихъ могутъ быть производимы вычисленія. Обозначая буквами величины извѣстныя и неизвѣстныя, Віетъ создалъ науку о символахъ и показалъ какъ эти символы подчиняются всѣмъ тѣмъ дѣйствіямъ, которыя производили до него только надъ числами. Первые основы своего метода Віетъ изложилъ въ 1591 г. въ своемъ „Введеніи къ искусству аналитики“ [1]) и въ послѣдующихъ добавленіяхъ къ этому сочиненію. Необыкновенную важность своего нововведенія ясно сознавалъ уже самъ Віетъ, говоря: „что методъ его даетъ возможность рѣшить самый важный вопросъ, а именно: задачу о рѣшеніи всѣхъ задачъ“ [2]). Показавъ какъ алгебраическимъ путемъ могутъ быть рѣшены различные геометрическіе вопросы, рѣшаемые до него построеніемъ, Віетъ внесъ въ изслѣдованіе геометрическихъ вопросовъ новое направленіе, которое послужило къ болѣе тѣсному сближенію Алгебры съ Геометріей.

---

[1]) Francisci Vietae in artem analyticam Isagoge, 1591, Tours. pet. in-fol. Дополненіемъ къ этому сочиненію служило другое, заглавіе котораго: Ad Logisticem speciosam Notae priores. Оно было напечатано только послѣ смерти автора въ собраніи его сочиненій, изданномъ подъ заглавіемъ: Francisci Vietae Opera Mathematica in unum Volumen congesta, ac recognita; Operâ atque studio Francisci à Schooten Leydensis. Lugduni Batavorum. 1646. in—4. Первыя два поименованныя сочиненія Віета переведены на франц. яз. и напечатаны въ Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche. Roma. T. I, pag. 223—276.

[2]) Denique fastuosum problema problematum ars Analytice, triplicem Zetetices Poristices et Exegetices formam tandem induta, iure sibi adrogat, Quod est nullum non problema solvera (In artem analyticam Isagoge, cap. VIII, 29).

Замѣчательная попытка Віета получила дальнѣйшее развитіе только благодаря французскому философу *Декарту* (1596—1650 г.), котораго по справедливости считаютъ истиннымъ творцемъ Аналитической Геометріи, хотя весьма вѣроятно, что первоначальную идею своего метода Декартъ почерпнулъ изъ сочиненій Віета. Методъ свой Декартъ изложилъ въ первый разъ въ 1637 г. въ своей „Геометріи", составляющей прибавленіе къ философскому трактату [1]). Особенность метода координатъ, созданнаго Декартомъ, заключается въ томъ, что онъ внесъ въ Геометрію, при рѣшеніи вопросовъ различнаго рода характеръ общности, который она до него не имѣла. До Декарта геометры изслѣдовали только частныя свойства нѣкоторыхъ кривыхъ; такое направленіе существовало у всѣхъ древнихъ геометровъ. Методъ внесенный въ Геометрію Декартомъ придалъ ей характеръ, который она до него не имѣла, такъ какъ при помощи одной формулы стало возможно выразить свойства, принадлежащія цѣлымъ классамъ кривыхъ. Благодаря новому направленію, данному Декартомъ, Геометрія быстро подвинулась впередъ и развитіе ея оказало несомнѣнную пользу развитію другихъ отраслей математическихъ наукъ. Особенно много подвинулась впередъ Алгебра, символическіе пріемы которой стали принимать наглядную форму и стали благодаря этому болѣе понятны, вслѣдствіи ихъ осязательности. Однимъ изъ первыхъ приложеній Геометріи къ Алгебрѣ было объясненіе значенія и примѣненіе отрицательныхъ корней уравненій, о которыхъ древніе математики имѣли весьма неотчетливое представленіе и которые ими старательно избѣгались. Начиная съ Декарта развитіе Геометріи и Алгебры идетъ рука объ руку и развитіе одной тѣсно связано съ развитіемъ другой. Методъ Декарта былъ подготовительнымъ путемъ къ блестящему открытію Лейбница и Ньютона—дифференціальному исчисленію.

Методъ координатъ былъ примѣненъ Декартомъ только на плоскости къ Геометріи двухъ измѣреній. Сознавая всю важность и значеніе своего метода Декартъ не ограничился приложеніемъ его къ плоскимъ кривымъ, а показалъ также его приложеніе къ кривымъ двойной кривизнѣ въ своей теоріи кривыхъ двойной кривизны. Для этой цѣли онъ изъ точекъ кривой, лежащей въ пространствѣ, опускалъ перпендикуляры на двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости; проэкціи этихъ перпендикуляровъ образовали двѣ плоскія кривыя, положеніе каждой изъ которыхъ онъ относилъ къ двумъ осямъ координатъ, лежащимъ въ плоскости кривой, изъ которыхъ одна была пересѣченіе двухъ плоскостей. Пріемъ этотъ, какъ видно, давалъ

[1]) *Descartes*, Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérite dans les sciences; plus la Dioptrique, les Méteóres et la Géométrie. Leyde, 1637., in—4.

возможность, при помощи метода координатъ, опредѣлить положеніе кривой въ пространствѣ. Методъ этотъ приводитъ къ системѣ координатъ трехъ измѣреній и къ представленію поверхностей въ видѣ уравненія между тремя перемѣнными. Но прошелъ значительный періодъ времени пока геометры освоились съ методомъ координатъ и первоначально ограничивались только примѣненіемъ его къ плоскимъ кривымъ.

Методъ координатъ Декарта, какъ всякое нововведеніе, былъ встрѣченъ многими изъ современниковъ автора „Геометріи" съ неудовольствіемъ. Къ числу противниковъ новаго метода принадлежалъ также французскій геометръ *Роберваль* (Roberval, 1602—1675) подвергшій „Геометрію" Декарта самой строгой критикѣ; извѣстность Роберваля среди современныхъ ему математиковъ только способствовала распространенію метода координатъ. Есть основанія полагать, что критикуя сочиненіе Декарта Роберваль руководствовался не чувствомъ справедливости, а скорѣе дѣйствовалъ подъ вліяніемъ зависти, такъ какъ впослѣдствіи имъ самимъ былъ примѣненъ методъ Декарта въ одномъ изъ своихъ сочиненій [1]). Къ числу сторонниковъ метода Декарта принадлежалъ французскій математикъ *Ферма* (1601—1665), которому нѣкоторые изъ аналитическихъ пріемовъ Декарта были извѣстны еще ранѣе выхода въ свѣтъ „Геометріи", но спеціальный характеръ его изслѣдованій, основанныхъ имъ, большею частью, на созданномъ имъ методѣ „*maximis* и *minimis*" ближе подходитъ къ геометрическимъ изслѣдованіямъ древнихъ геометровъ [2]). Другой сторонникъ новаго метода былъ другъ Декарта французъ *Де-Боне* (De-Beaune, 1601—1652), написавшій комментаріи на „Геометрію" [3]), которые очень цѣнились самимъ Декартомъ. Де-Боне установилъ новыя воззрѣнія въ Аналитической Геометріи кривыхъ линій, онъ первый указалъ на связь существующую между уравненіемъ и свойствами касательной и соотвѣтствующей ей кривой. Комментаріи Де-Боне появились въ печати въ первый разъ при обширномъ комментаріи на „Геометрію" Декарта, сдѣланномъ голландскимъ математикомъ *Ванъ-Шотеномъ* (1581—1661). Въ другомъ изъ своихъ сочиненій озаглавленномъ „Матема-

[1]) De resolutione aequationum. Сочиненіе это напечатано было послѣ смерти Роберваля вмѣстѣ съ другими его сочиненіями въ сборникѣ: Divers ouvrages de mathématiques et de physique, par M. M. de l'Académie Royale des Sciences. Paris, 1693 in—fol.

[2]) Сочиненіе Ферма „о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ" до насъ не дошло въ подлинникѣ, а сохранилось въ изданіи сочиненій Ферма: Varia opera mathematica D. Petri de Fermat, senatoris Tolosani; Tolosae, 1679, in—fol.

[3]) Geometria, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, nunc autem cum notis Florimondi de Beaune, incuria Blaesensi consil. regii, in linguam latinam versa opera Franc. a Schooten. Lugd. Batav. 1649, in—4. Есть еще изданія 1659 и 1683 годовъ.

тическія упражненія" [1]) Ванъ-Шотенъ примѣнилъ методъ координатъ къ рѣшенію многихъ весьма сложныхъ и интересныхъ вопросовъ высшей геометріи. Методъ этотъ онъ съ успѣхомъ примѣнилъ въ III-ей книгѣ этого сочиненія, предметъ которой относится къ возстановленію утеряннаго сочиненія Аполлонія „Плоскія мѣста". Въ V-й книгѣ того же трактата Шотена мы находимъ первое приложеніе метода координатъ къ кривымъ въ пространствѣ. Это былъ первый шагъ къ Аналитической Геометріи трехъ измѣреній. Изъ числа другихъ послѣдователей метода Декарта упомянемъ еще голландскихъ математиковъ: *Вита* (Witt, 1632—1672), *Слуза* (Sluse, 1623—1685), *Гудда* (Hudde, 1633—1704), *Гюйгенса* (Huyghens, 1629—1695), *Ванъ-Герета* (Van-Heuraet), англичанина *Нейля* (Neil, 1630—1677), усвоившихъ методъ координатъ и примѣнявшихъ его при рѣшеніи различныхъ геометрическихъ вопросовъ. Послѣдніе два геометра, именно Ванъ-Геретъ и Нейль, одни изъ первыхъ занимались вопросомъ о спрямленіи кривыхъ.

Первое сочиненіе относящееся къ коническимъ сѣченіямъ, въ которомъ былъ приложенъ методъ Декарта, было написано въ 1665 году англійскимъ математикомъ *Валлисомъ* (1616 — 1703) [2]). Сочиненіе это не заключаетъ ничего особеннаго, такъ какъ Валлисъ въ своихъ геометрическихъ изслѣдованіяхъ большею частію всегда слѣдовалъ синтетическому методу древнихъ, творенія которыхъ онъ очень цѣнилъ. Несравненно важнѣе приложеніе метода Декарта, которое сдѣлалъ Валлисъ въ своей „Ариѳметикѣ безконечныхъ" [3]) къ методу недѣлимыхъ италіанскаго математика *Кавалери* (Cavalieri, 1598—1647).

Одновременно съ Декартомъ другіе современные ему геометры, продолжая заниматься изученіемъ сочиненій древнихъ греческихъ геометровъ Аполлонія и Паппуса, изслѣдовали геометрическіе вопросы съ иной точки зрѣнія—съ синтетической. Обобщая выводы древнихъ и продолжая далѣе кругъ геометрическихъ изслѣдованій они оказали также не малое вліяніе на послѣдующее развитіе Аналитической Геометріи. Изъ числа такихъ геометровъ первое мѣсто принадлежитъ другу Декарта *Дезаргу* (1593—1662) и ученику послѣдняго извѣстному *Паскалю* (1623—1662). На труды этихъ геометровъ долгое время не было обращено должнаго вниманія, такъ какъ изслѣдованіе геометрическихъ вопросовъ синтетическимъ путемъ постепенно вытѣснялось новымъ методомъ координатъ Декарта. Только въ началѣ нынѣшняго столѣтія на синтетическій методъ изслѣдованій было обращено

[1]) Exercitationes mathematicae, Amsterd., 1657.

[2]) *Wallis*, De Sectionibus Conicis, Oxon., 1665, in—4.

[3]) *Wallis*, Arithmetica infinitorum, sive nova methodus inquirendi in curvilinearum quadraturam aliaque problemata, Oxon., 1656, in—4.

снова вниманіе и онъ далъ блестящіе результаты. Сочиненія Дезарга касались многихъ геометрическихъ вопросовъ интересныхъ по своему существу, къ сожалѣнію авторъ ихъ писалъ въ видѣ набросковъ, сообщая читателямъ только основныя положенія и результаты. Главное изъ его сочиненій,—напечатанное въ 1639 г.,—имѣло предметомъ коническія сѣченія [1]), методъ изслѣдованій Дезарга примѣненный въ немъ былъ основанъ на методѣ перспективы. Сочиненіе это дошло до насъ только благодаря копіи снятой съ напечатаннаго экземпляра геометромъ Лагиромъ. Въ сочиненіи этомъ находится много замѣчательныхъ изслѣдованій и воззрѣній автора, такъ напр. Дезаргъ первый высказалъ явно положеніе выраженное Евклидомъ неявно въ своемъ постулатѣ, что если разсматривать прямую, какъ продолженную въ обѣ стороны въ безконечность, то ея противоположные концы сходятся. Въ этомъ же сочиненіи Дезарга изложены основныя начала теоріи инволюціи, которыя впослѣдствіи благодаря французскому геометру Шалю стали однимъ изъ основаній новѣйшей Геометріи; также Дезаргу мы обязаны основными положеніями метода сѣкущихъ и метода поляръ и полюсовъ на плоскости и въ пространствѣ. Послѣдній методъ, который нѣкоторые приписывали французскому геометру Лагиру, послужилъ основаніемъ метода взаимныхъ поляръ. Геометрическія изслѣдованія и методъ Дезарга высоко цѣнились Декартомъ, не смотря на то что методы ихъ были различны; говоря о заслугахъ Дезарга Декартъ въ письмѣ къ Мерсенну говоритъ, „что Дезаргъ первый внесъ въ геометрическія изслѣдованія направленіе и характеръ, который онъ, Декартъ, называетъ метафизикой Геометріи и который никѣмъ не былъ прилагаемъ кромѣ Архимеда".

Направленіе внесенное въ геометрическія изслѣдованія Дезаргомъ нашло послѣдователя въ лицѣ французскаго философа Паскаля, который также слѣдовалъ синтетическому пути. Методъ этотъ Паскаль примѣнилъ съ рѣдкимъ успѣхомъ въ своемъ сочиненіи „Коническія Сѣченія" въ шести книгахъ. Къ сожалѣнію сочиненіе это въ настоящее время утеряно, хотя еще въ 1676 году Лейбницъ въ бытность свою въ Парижѣ имѣлъ его въ рукахъ и упоминаетъ о его содержаніи. Указанія на содержаніе этого замѣчательнаго сочиненія сохранились также въ дошедшемъ сочиненіи Паскаля „Опытъ коническихъ сѣченій", написанномъ въ 1640 году [2]). Въ не-

[1]) Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan, et aux événements des contrariétés d'entre les actions des puissances ou forces. Paris, 1639.

[2]) Сочиненіе это было издано только въ 1779 г., подъ заглавіемъ: „Essai pour les coniques", въ полномъ изданіи сочиненія Паскаля, даннымъ Bossut.



дошедшемъ до насъ трактатѣ Паскаля были положены основы предложеній, касающихся ангармоническихъ отношеній, и дано также дальнѣйшее развитіе теоріи инволюціи Дезарга. Въ „Опытѣ“ Паскаля были указаны свойства шестиугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе. Шестиугольникъ этотъ Паскаль называлъ „мистическимъ“. Коническія сѣченія Паскаль образовывалъ съ помощью круга, примѣняя начала перспективы, и свойства ихъ выводилъ изъ свойствъ круга.

Другой современникъ Декарта, также одинъ изъ его друзей, французъ *Мидоржъ* (1585—1647) первый написалъ во Франціи сочиненіе по коническимъ сѣченіямъ, вышедшее въ 1631 г. въ двухъ книгахъ; въ 1641 г. оно было авторомъ дополнено и издано въ четырехъ книгахъ [1]). Методъ изслѣдованій Мидоржа слѣдуетъ отнесть къ синтетическому методу древнихъ, который онъ стремился обобщить и расширить.

Послѣдователемъ метода Паскаля былъ также извѣстный знатокъ твореній древнихъ греческихъ геометровъ голландецъ іезуитъ *Гр. де-Сенъ-Венсенъ* (Grégoire de-St.-Vincent, 1584—1667), обогатившій теорію коническихъ сѣченій множествомъ предложеній, найденныхъ имъ [2]).

Въ духѣ древнихъ геометровъ разработывалъ теорію коническихъ сѣченій также французскій математикъ *Лагиръ* (La-Hire, 1640—1718) написавшій нѣсколько сочиненій, изъ которыхъ главное „Трактатъ коническихъ Сѣченій“ напечатанный въ 1685 г. [3]). Хотя Лагиръ былъ основательно знакомъ съ методомъ координатъ Декарта, но онъ предпочиталъ производить свои изслѣдованія методомъ синтетическимъ, впрочемъ въ значительной степени разнящимся отъ пріемовъ древнихъ. Лагиръ инымъ образомъ образовывалъ коническія сѣченія чѣмъ древніе. Онъ принадлежалъ къ числу послѣдователей Дезарга, который поручилъ ему даже окончаніе одного изъ своихъ сочиненій по прикладной математикѣ.

Первый геометръ представившій поверхность въ видѣ уравненія между тремя перемѣнными, на сколько извѣстно, былъ французъ *Паренъ* (1666—1715). Соображенія свои по этому вопросу онъ представилъ въ мемуарѣ,

[1]) *Mydorgius*, Prodrom. Catoptric. et Dioptricum. Parisiis 1641, in fol. „Коническія Сѣченія“ были введеніемъ къ сочиненію, содержаніе котораго Катоптрика и Діоптрика. Введеніе это должно было заключать восемь книгъ, но послѣднія четыре не были напечатаны.

[2]) *Gregorio a St.-Vicentio*, Opus geometricum quadraturae circuli et Sectionum coni, decem libris comprehensum. Vol. I—II, Antverp. 1625, in—fol. Въ сочиненіи этомъ авторъ даетъ невѣрное рѣшеніе задачи квадратуры круга. Ошибочность выводовъ первый указалъ Декартъ.

[3]) Sectiones conicae in novem libros distributae. Parisiis, 1685, in—fol.

читанномъ имъ 1700 г. въ Парижской Академіи Наукъ. Въ другомъ своемъ сочиненіи Паренъ находитъ уравненіе шара, уравненіе касательной плоскости къ шару, уравненіе нѣкоторыхъ поверхностей третьей степени и кривыхъ двойной кривизны и многое другое [1]). Нововведеніе Парена оказало несомнѣнныя услуги развитію Аналитической Геометріи трехъ измѣреній.

Методъ координатъ въ пространствѣ въ первый разъ обстоятельно былъ изложенъ французскимъ геометромъ *Клеро* (1713 — 1765), въ 1731 г., въ сочиненіи: „Трактатъ о кривыхъ двойной кривизны“ [2]), которое онъ написалъ имѣя всего шестнадцать лѣтъ. Въ этомъ сочиненіи показано примѣненіе координатъ въ пространствѣ къ поверхностямъ и кривымъ двойной кривизны, происходящихъ отъ ихъ пересѣченія. Изъ другихъ математиковъ способствовавшихъ развитію Анал. Геом. трехъ измѣреній укажемъ еще на французскаго геометра аббата *Де-Гуа* (1713—1788) автора сочиненія по теоріи кривыхъ [3]), въ которомъ онъ даетъ пріемы для нахожденія касательныхъ, ассимптотъ и кратныхъ точекъ кривыхъ всевозможныхъ степеней. Онъ первый показалъ, что нѣкоторыя изъ этихъ точекъ могутъ лежать на безконечности. Методъ Декарта нашелъ также примѣненіе въ сочиненіи швейцарскаго геометра *Крамера* (1704—1752), озаглавленномъ: „Введеніе въ анализъ алгебраическихъ кривыхъ“ [4]) и въ сочиненіи француза маркиза *Лопиталя* (1661—1704), озаглавленномъ „Аналитическій трактатъ коническихъ сѣченій“ [5]). Въ послѣднихъ двухъ сочиненіяхъ подробно изложена аналитическая теорія кривыхъ линій и поверхностей.

Знаменитый *Леонардъ Эйлеръ* (1707—1783), членъ СПБ. Академіи Наукъ, также изложилъ основанія аналитической теоріи различныхъ геометрическихъ кривыхъ въ своемъ сочиненіи: „Введеніе въ анализъ безконечныхъ“, написанномъ въ 1748 г. [6]). Изслѣдованія свои онъ распространилъ на Геометрію трехъ измѣреній и первый изслѣдовалъ уравненія съ двумя и тремя перемѣнными, заключающія уравненія поверхностей втораго порядка. Изслѣдованія Эйлера занимательны по своей удобопонятности и общности.

[1]) *Parent*, Essai et recherches de physique et de mathématiques. Paris, 1713, 3 vol. in—12.

[2]) *Clairaut*, Recherches sur les courbes a double courbure. Paris, 1731 in—4.

[3]) *De-Gua*, Usage de l'analyse de Descartes, pour découvrir sans le secours du calcul différentiel, les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres. Paris, 1740, in—12.

[4]) *Cramer*, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Génève. 1750, in—4.

[5]) *L'Hospital*, Traité analytique des sections coniques. Paris, 1720, in—4.

[6]) *L. Euler*, Introductio in Analysin infinitorum. Vol. I—II. Lausanne, 1748, in—8.

Первый изъ геометровъ изслѣдовавшій вопросъ о кривыхъ высшихъ порядковъ во всей его общности былъ великій *Ньютонъ* (1642—1727). Работы его по этому предмету изложены въ сочиненіи: „Перечисленіе кривыхъ третьяго порядка" [1]). Ньютонъ насчитываетъ 72 вида различныхъ кривыхъ третьяго порядка, которыя онъ дѣлитъ на пять классовъ. Онъ показываетъ, что онѣ образованы перспективной проэкціей пяти кубическихъ параболъ, подобно тому какъ всѣ кривыя втораго порядка образованы проэкціями круговъ. Также указаны были Ньютономъ различныя интересныя свойства принадлежащія алгебраическимъ кривымъ, но доказательствъ никакихъ этому онъ не далъ. Въ настоящее время даже трудно сказать, какъ онъ пришелъ къ этимъ выводамъ: путемъ - ли анализа или геометрическимъ? Многіе изъ вопросовъ чистой геометріи рѣшены были Ньютономъ въ первомъ отдѣлѣ его знаменитаго сочиненія „Начала философіи" [2]). Въ этомъ отдѣлѣ изложенъ методъ Ньютона, которымъ онъ пользовался при рѣшеніи различныхъ геометрическихъ вопросовъ, а также показаны многія замѣчательныя свойства коническихъ сѣченій.

Болѣе обстоятельно была изложена теорія кривыхъ, разсмотрѣнныхъ Ньютономъ, англійскими геометрами *Стирлингомъ* (1692—1770) и *Маклореномъ* (1698 — 1746). Первый далъ доказательства различныхъ свойствъ кривыхъ третьяго порядка перечисленныхъ Ньютономъ и прибавилъ къ нимъ еще четыре вида. Изслѣдованія Стирлинга составляютъ предметъ его сочиненія: „Кривыя третьяго порядка перечисленныя Ньютономъ" [3]). Подобнаго же содержанія суть сочиненія Маклорена [4]), во второмъ изъ которыхъ онъ выводитъ наиболѣе интересныя и важныя свойства алгебраическихъ кривыхъ синтетическимъ путемъ.

Попытки классификаціи различныхъ кривыхъ были уже сдѣланы древними геометрами. Они сознавали что всякая кривая есть ничто иное какъ рѣшеніе неопредѣленнаго вопроса. Въ такомъ смыслѣ древніе называли кривыя *геометрическими мѣстами*. Хотя они не имѣли понятія объ уравненіяхъ и объ представленіи кривыхъ уравненіями, но они понимали что геометрическая кривая есть *мѣсто* точекъ соотвѣтствующихъ безчис-

[1]) *Isaac Newton*, Enumeratio linearum tertii ordinis. Сочиненіе это есть прибавленіе къ „Оптикѣ" того же автора, напечатанной въ 1704 г.

[2]) *Newton*, Philosophiae naturalis principia mathematica. London, 1687, in—4.

[3]) *Stirling*, Lineae tertii ordinis Newtonianae. Oxon. 1717, in—8.

[4]) *Maclaurin*, Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis. Lond. 1719, in—4.

Maclaurin, De linearum geometricarum proprietatibus generalis tractatus. Lond. 1720, in—4.

ленному множеству рѣшеній, соотвѣтствующихъ предложенному вопросу. Декартъ указалъ на отличительныя свойства двухъ видовъ кривыхъ, именно: геометрическихъ и механическихъ. По его опредѣленію *геометрическія* кривыя суть тѣ, въ которыхъ точки кривой могутъ быть опредѣлены сочетаніемъ двухъ движеній, между которыми существуетъ опредѣленное отношеніе. Таковы конхоида, циссоида и т. д. Къ числу *механическихъ* кривыхъ принадлежатъ: спираль, квадратрикса, циклоида, логариѳмическая кривая и др., отношенія движеній отъ которыхъ они происходятъ неизвѣстны. Это дѣленіе кривыхъ было замѣнено впослѣдствіи другимъ, предложеннымъ *Лейбницомъ* (1646—1716). Онъ всѣ кривыя отнесъ къ числу геометрическихъ, раздѣливъ ихъ на два класса: *кривыя алгебраическія* и *кривыя трансцендентныя*. Первыя суть тѣ для которыхъ отношеніе абсциссъ къ ординатамъ выражается конечнымъ алгебраическимъ уравненіемъ. Вторыя суть тѣ коихъ уравненія заключаютъ безчисленное множество членовъ или трансцендентныя функціи, каковы Sin, Cos, Tang, log и т. д. Классификація алгебраическихъ кривыхъ, какъ мы видѣли выше, дана была въ первый разъ Ньютономъ.

Мы перечислили всѣ болѣе извѣстныя сочиненія по Аналитической Геометріи написанныя въ XVII и XVIII столѣтіяхъ и указали на ихъ характеръ. Эти же сочиненія представляютъ постепенное развитіе метода координатъ, созданнаго Декартомъ. Мы уже видѣли какъ Паскаль, Дезаргъ и другіе геометры стремились создать синтетическій методъ, основанный на новыхъ методахъ, который они постепенно вводили въ геометрическія изслѣдованія. Такой синтетическій методъ былъ снова введенъ въ геометрическія изслѣдованія въ началѣ настоящаго столѣтія знаменитымъ французскимъ геометромъ *Монжемъ* (1746—1818), основателемъ политехнической школы, творцемъ „Начертательной Геометріи" [1]). Предметъ Начерт. Геом. есть рѣшеніе различныхъ вопросовъ, относящихся къ фигурамъ въ пространствѣ путемъ графическимъ—на плоскости. Методъ Монжа много способствовалъ болѣе обобщенному воззрѣнію на фигуры вообще. Такимъ образомъ въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ разсмотрѣніе различныхъ фигуръ и ихъ соотношеній въ пространствѣ являлось однимъ изъ самихъ главныхъ. Подтвержденіемъ этому отчасти могутъ служить классическое сочиненіе Монжа „Приложеніе Анализа къ Геометріи" [2]), предметъ котораго происхожденіе и свойства поверхностей, а равно и труды многочисленныхъ его учениковъ:

[1]) *Monge*, Géométrie descriptive, Paris, 1794, in—4.

[2]) *Monge*, Application de l'Analyse à la Géométrie des surfaces du 1-e et 2-e degré. Paris, 1807—1809, in—8.

Дюпена (1784—18..) [1]), *Біо* (1774—1862) [2]), *Бріаншона* (1785—18..) [3]), *Гашета* (1769—1834) [4]), *Понселе* (1788—1867) [5]) и многихъ другихъ.

Понселе въ 1822 г. въ своемъ сочиненіи „Трактатъ о проэктивныхъ свойствахъ фигуръ" далъ методъ проэкцій, въ которомъ отъ частныхъ свойствъ фигуръ восходятъ къ болѣе общимъ. Такія свойства носятъ названіе *проэктивныхъ* свойствъ фигуръ. Перспективная проэкція еще ранѣе была приложена къ геометрическимъ изслѣдованіямъ Дезаргомъ, Ньютономъ и Паскалемъ, о чемъ мы упоминали уже выше, а впослѣдствіи нѣмецкій геометръ *Ламбертъ* (1728—1777) въ своей „Перспективѣ" [6]) приложилъ ее къ рѣшенію нѣкоторыхъ весьма сложныхъ вопросовъ, при помощи преобразованія ихъ въ болѣе простые. Но только Понселе въ проэктивныхъ свойствахъ фигуръ увидѣлъ весьма плодотворный геометрическій методъ и при помощи его развитія далъ новый толчекъ къ возникновенію новѣйшаго синтетическаго метода. Въ сочиненіи Понселе изложена также одна изъ болѣе важныхъ геометрическихъ теорій, именно „Теорія взаимныхъ поляръ", первоначальные слѣды которой нѣкоторые математики усмотрѣли въ сочиненіяхъ Дезарга. Еще ранѣе, именно Лагиру въ 1685 г., было извѣстно, что въ плоскости коническаго сѣченія всякая точка съ прямою и всякая прямая съ точкою находятся въ извѣстномъ соотношеніи. Такое соотношеніе Понселе примѣнилъ къ преобразованію одной фигуры въ другую, ей взаимную, и изъ него создалъ геометрическій методъ, гдѣ точкѣ въ одной фигурѣ соотвѣтствуетъ прямая въ другой, и обратно. Французскій геометръ *Гергонне* (1771—18..) въ подобномъ соотношеніи двухъ взаимныхъ фигуръ усмотрѣлъ *общее начало*, изъ котораго съ того времени возникла новая точка зрѣнія при геометрическихъ изслѣдованіяхъ. Начало это извѣстно

---

[1]) *Dupin*, Essai sur la description des lignes et des surfaces du second degré. Помѣщ. въ Journal de l'École Polytechnique, XIV cahier, 1808, p. 45—83.

Dupin, Développements de Géométrie, 1813, Paris, in—4.

Dupin, Applications de Géométrie et de Mécanique, Paris. 1822, in—4.

[2]) *Biot*, Essai de Géométrie analytique, Paris, 1805, in—8.

Biot, Essai analytique des courbes et des surfaces, Paris, 1802, in—8.

[3]) *Brianchon*, Mémoire sur les surfaces courbes du second degré. Помѣщ. въ Journal de l'École Polytechnique, XIII cahier, 1806, p. 297—311.

Brianchon, Mémoire sur les lignes du second ordre. Paris, 1817, in—8.

[4]) *Hachette*, Éléments de Géométrie à trois dimensions, Paris, 1817, in—8.

Hachette, Application de l'algèbre à la géométrie de trois dimensions, Paris, 1817, in—8.

[5]) *Poncelet*, Traité des propriétés projectives des figures. Paris, 1822, in—8.

Poncelet, Théorie générale des polaires réciproques. См. Journal Crell. T. IV, p. 1—71, 1829.

[6]) *Lambert*, Die freie Perspective. Zürich, 1759, in—8.

нынѣ подъ именемъ *двойственности координатъ* (dualité). Названіе это введено было Гергонномъ [1]).

Новая точка зрѣнія введенная Понселе въ изслѣдованіе геометрическихъ вопросовъ получила вскорѣ быстрое развитіе. Незадолго до появленія сочиненія Понселе появилась въ 1803 г. „Геометрія положенія" [2]) французскаго геометра *Карно* (1753—1823), въ которой авторъ изслѣдуетъ свойства фигуръ въ зависимости отъ ихъ положенія. Главное нововведеніе Карно въ своей „Геометріи" заключается въ томъ, что онъ далъ геометрическое представленіе количествъ положительныхъ и отрицательныхъ, что способствовало значительно обобщенію геометрическихъ рѣшеній, въ томъ смыслѣ что одного рѣшенія было достаточно, каковы бы ни были положенія различныхъ частей фигуры. До Карно требовалось столько рѣшеній сколько было различныхъ расположеній частей фигуры.

Дальнѣйшему развитію геометрическихъ изслѣдованій много также содѣйствовала новая геометрическая теорія мнимыхъ количествъ, созданная въ началѣ настоящаго вѣка. Теорія эта дала блестящіе результаты въ своихъ приложеніяхъ къ различнымъ вопросамъ математическаго анализа. Первый [3]) разсматривавшій выраженіе $\sqrt{-1}$ какъ условный символъ, выражающій перпендикулярность, а выраженія вида $\pm a\sqrt{-1}$ какъ представляющія линіи перпендикулярныя къ направленіямъ по которымъ отсчитывались величины дѣйствительныя, положительныя и отрицательныя, былъ французскій математикъ *Арганъ* (1768—1813), написавшій въ 1806 г. сочиненіе „Попытка представить мнимыя величины при геометрическихъ построеніяхъ" [4]). Одновременно съ Аргономъ тѣмъ же вопросомъ занимался аббатъ *Бюэ* [5]) и *Франсе* [6]). Дальнѣйшія обобщенія методъ Аргана получилъ благодаря тру-

---

[1]) Annales de Mathématiques, T. XVI, 1825—1826, p. 209.

[2]) *Carnot*, Géométrie de position; Paris, 1803, in—4.

Carnot, Théorie des transversales, Paris, 1806, in—4.

[3]) Первая попытка представить геометрически мнимыя выраженія принадлежитъ прусскому геометру *Кюну* (Kühn, 1690—1769), автора мемуара: Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis. Мемуаръ этотъ былъ напечатанъ авторомъ въ 1750 году въ Novi Commentarii Academ. Scient. Imper. Petropolit., T. III.

[4]) *Argand*, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. Paris, 1806, in—8. Есть изданіе 1873 г.

[5]) *Buée*, Mémoire sur les quantités imaginaires. Помѣщено въ Philosophical Transaction, 1806.

[6]) *Français*, Nouveaux principes de Géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires. Помѣщено въ Annales de Mathématiques, T. IV, p. 222, 228, 364; T. V p. 197; 1813—1815.

дамъ англичанина *Варена* [1]), француза *Мурейя* [2]) и наконецъ въ новой геометрической *теоріи эквиполенцій*, созданной профессоромъ падуанскаго университета *Беллавитисомъ* въ 1832 году [3]). Правильное воззрѣніе на геометрическое представленіе мнимыхъ выраженій имѣлъ также извѣстный германскій математикъ *Гауссъ* (Gauss, 1777—1855), предложившій [4]) символъ i для выраженія $\sqrt{-1}$. Особенно удачныя приложенія геометрической теоріи мнимыхъ величинъ при изслѣдованіи различныхъ аналитическихъ вопросовъ сдѣлалъ французскій математикъ *Коши* (1789—1857) въ 1847 г. [5]). Методъ геометрическаго представленія точки на плоскости при помощи мнимыхъ выраженій англійскій геометръ *Гамильтонъ* обобщилъ къ алгебраическому представленію точки въ пространствѣ. Методъ этотъ получилъ названіе: *метода кватерненовъ* [6]). Упомянемъ еще англичанъ *Пикока*, который въ своей „Алгебрѣ" [7]) занимался символомъ $(+)^{p/q}$ и *Грегори* (1813—1844), который въ одномъ изъ своихъ мемуаровъ предложилъ особенное геометрическое представленіе для мнимыхъ количествъ [8]). Оригинальное геометрическое представленіе мнимыхъ количествъ далъ еще современный фран-

[1]) *John Warren*, A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities, Cambridge, 1828, in—8. Дальнѣйшее развитіе своей теоріи авторъ даетъ въ Philosophical Transaction за 1829 г. pag., 241—254, 339—359.

[2]) *Mourey*, La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, Paris, 1828. in—8. Есть изданіе 1861 г.

[3]) *Bellavitis*, Metodo delle equipollenze (См. Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto, T. VII, 1837).—Sposizione del metodo delle equipollenze (См. Memorie della Società Italiana delle scienze, T. XXV, Modena, 1854). Послѣднее сочиненіе существуетъ во француз. переводѣ: Exposition de la méthode des equipolences par G. Bellavitis, traduit par Laisant, Paris, 1874, in—8.

[4]) О мнимыхъ величинахъ Гауссъ упоминаетъ мимоходомъ, говоря объ составныхъ количествахъ. Онъ говоритъ, что если величины положительныя и отрицательныя отсчитывать по горизонтальной линіи на право и на лѣво, то мнимыя величины слѣдуетъ отсчитывать по направленію перпендикулярному. См. Göttingischen gelehrten Anzeigen, Jahr 1831, St. 64, S. 625 и Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio 2-de, Göttingae, 1832, pag. 16, art. 38 et 39.

[5]) *Cauchy*, Sur les quantités géometriques; См. Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, T. IV, 1847, Paris, pag. 157—180.

[6]) *Hamilton*, On Quaternions, or on a new System of Imaginaries in Algebra. См. Philosophical Magazine, 1844, 1845. — On Symbolical Geometry. См. The Cambridge and Dublin Mathem. Journal, 1846, Vol. I; 1847, Vol. II.— *Hamilton*, Lectures on quaternions. Dublin, 1853, in—8.

[7]) *Peacock*, Algebra. Cambrid., 1842, in—8.

[8]) *Gregory*, On the elementary principles of the application of algebraical symbols to geometry. Помѣщ. въ Cambridge Mathematical Journal, T. II, 1841. — Дальнѣйшее развитіе своей мысли Грегори приложилъ въ сочиненіи: *Gregory*, Exemples of the Differen. and Integral Calculus. Cambrid., 1841, in—8.

цузскій геометръ *Мари* [1]), съ помощью котораго онъ легко объяснилъ періодичность не только интеграловъ простыхъ, но и кратныхъ.

Изъ новаго метода проэкцій Понселе, новаго воззрѣнія на геометрическое значеніе мнимыхъ выраженій, „Геометріи положенія" Карно возникла новѣйшая синтетическая геометрія. Предметъ ея изслѣдованій касался въ началѣ только общихъ проэктивныхъ свойствъ фигуръ, впослѣдствіи въ нее вошли также изслѣдованія непроэктивныхъ — метрическихъ свойствъ. Послѣ Понселе французскій геометръ *Шаль* (1793—1800) и нѣмецкій геометръ *Штейнеръ* (1796—1863), независимо одинъ отъ другаго, положили основанія новой синтетической геометріи, опредѣливъ отношенія существующія между проэкціей двухъ фигуръ, независимо отъ ихъ перспективнаго положенія. Условія эти легли въ основаніе ихъ теоріи. Труды этихъ двухъ геометровъ составили предметъ многочисленныхъ ихъ сочиненій и мемуаровъ, изъ которыхъ болѣе важны „Высшая Геометрія" Шаля [2]) и „Геометрическія построенія произведенныя при помощи неподвижнаго круга и прямой линіи" Штейнера [3]). Въ другомъ сочиненіи „Систематическое развитіе взаимной зависимости геометрическихъ образовъ" [4]) Штейнеръ излагаетъ свои геометрическія воззрѣнія и подробно разбираетъ нѣкоторые изъ методовъ новѣйшей геометріи, какъ напр. двойственность, проэктивность и др. Около того же времени Геометрію положенія разработывалъ нѣмецкій геометръ *Стаудтъ* (1798—18..) авторъ сочиненія „Геометрія положенія" [5]), содержащее много интересныхъ изслѣдованій. Весьма много интересныхъ геометрическихъ вопросовъ было рѣшено италіанскимъ геометромъ *Маскерони* (1750—1800), изслѣдовавшимъ цѣлый рядъ задачъ, которыя онъ рѣшилъ въ своей „Геометріи циркуля" только съ помощью круга [6]).

Новый методъ внесенный въ изслѣдованія геометрическихъ вопросовъ далъ самые блестящіе результаты въ рукахъ такихъ геніальныхъ математи-

[1]) *Maximilien Marie*, Théorie des fonctions variables imaginaires. T. I—III. Paris, 1874—76, in—8.

[2]) *Chasles*, Traité de Géométrie Supérieure; Paris, 1852, in—8.

[3]) *Steiner*, Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und einem festen Kreises. Berlin, 1833, in—8.

[4]) *Steiner*, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität und s. w. Berlin, 1832, in—8. Сочиненіе это должно было состоять изъ пяти частей, но вышла въ свѣтъ только первая часть.

[5]) *Staudt*, Geometrie der Lage. Nürnberg, 1847, in—8.—Beiträge zur Geometrie der Lage. Heft 1—2—3, 1856—60. Nürnberg, in—8.

[6]) *Mascheroni*, La geometria del compasso. Pavia, 1797, in—8.

ковъ, какъ Шаль и Штейнеръ. Методъ этотъ способствовалъ много расширенію границъ геометрическихъ изслѣдованій. При этомъ замѣтимъ, что большую часть своихъ теоремъ Штейнеръ далъ безъ всякихъ доказательствъ, а приводитъ лишь ихъ сущность, между этими предложеніями есть весьма сложныя; ихъ доказательствомъ впослѣдствіи занимались многіе геометры. Изъ болѣе выдающихся сочиненій по Геометріи положенія укажемъ на сочиненіе германскаго геометра *Рейя*, вышедшее въ 1868 г. [1]).

Быстрое развитіе синтетической Геометріи оказало также вліяніе на дальнѣйшее развитіе Аналитической Геометріи. Явилась необходимость аналитическаго толкованія новыхъ началъ геометріи и новыхъ воззрѣній. Требовалось методъ доказательствъ, усвоенный синтетической геометріей, перевесть на аналитическій языкъ. Этому оказалъ важную услугу нѣмецкій геометръ *Плюккеръ* (1801—1868), занимавшійся болѣе глубокимъ и всестороннимъ изслѣдованіемъ аналитическихъ уравненій. Плюккеръ показалъ въ 1828 г. въ своемъ сочиненіи „Аналитически-геометрическія развитія“ [2]), какъ при аналитическомъ изслѣдованіи геометрическихъ задачъ при извѣстномъ сочетаніи уравненій видны линіи фигуръ и взаимное отношеніе между ними. Совершенно справедливо замѣтилъ Плюккеръ, сказавъ: „формы моихъ уравненій суть полныя представленія графическихъ построеній, въ которыхъ нѣтъ ничего посторонняго; это суть идеальныя, аналитическими символами, начертанныя фигуры“ [3]). Благодаря Плюккеру Аналитическая Геометрія совершенно измѣнилась и стала на должной степени своего развитія. Болѣе обстоятельно были изслѣдованы Плюккеромъ кривыя 3-го порядка, которыя онъ разсматриваетъ въ зависимости отъ ихъ вида и формы, при чемъ даетъ полное перечисленіе ихъ. Онъ насчитываетъ 219 кривыхъ 3-го порядка. Геометрическія свои воззрѣнія Плюккеръ проводилъ во многихъ сочиненіяхъ, изъ которыхъ болѣе важны слѣдующія: „Аналитическая Геометрія“ [4]), „Теорія алгебраическихъ кривыхъ“ [5]), „Геометрія трехъ измѣреній“ [6]). Кромѣ того Плюккеръ написалъ, подобно Шалю, множество мемуаровъ чисто геометрическаго характера.

---

[1]) *Reye*, Die Geometrie der Lage. Thle. 1—2. Hannover, 1866—68, in—8. Переведено также на французскій языкъ подъ заглавіемъ: *Reye*, Géométrie de position. Par. 1—2. Paris, 1880—81. in—8.

[2]) *Plücker*, Analytisch-geometrische Entwickelungen. Bd. I—II, Essen. 1828—31, in—4.

[3]) *Plücker*, Ueber Curven 3. Ordnung, J. Crelle, Bd. XXXIV, 1847, S. 332. Воззрѣніемъ этимъ, говоритъ Плюккеръ, я обязанъ Монжу.

[4]) *Plücker*, System d. Analytischen Geometrie. Berlin, 1835, in—4.

[5]) *Plücker*, Theorie der algebraischen Curven; Bonn, 1839, in—4.

[6]) *Plücker*, System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf, 1846, in—4.

Исходя изъ своихъ воззрѣній на методъ синтетической геометріи Плюккеръ и другой германскій геометръ *Мебіусъ* (1790—1868) [1]), независимо отъ Понселе и Гергонна, пришли къ началу двойственности координатъ, какъ это видно изъ нѣкоторыхъ мѣстъ „Аналитически-геометрическихъ развитій“ Плюккера и „Барицентрическаго счисленія“ Мебіуса [2]). Плюккеру также обязаны введеніемъ *тетраэдрическихъ координатъ* и *сокращеннаго способа*, который собственно въ первый разъ былъ предложенъ французскимъ геометромъ *Бобилье* (Bobilier) въ 1827 году [3]).

Новымъ синтетическимъ методомъ изслѣдованій впервые воспользовались геометры для изслѣдованія кривыхъ порядка выше втораго; этимъ занимались: Понселе, Штейнеръ и Плюккеръ. Въ теоріи этихъ кривыхъ особенное значеніе имѣли различныя присущія имъ свойства. Къ такимъ свойствамъ принадлежатъ, напримѣръ, такъ называемыя *точки перегиба* кривой, т. е. точки въ которыхъ кривыя измѣняютъ направленіе своей кривизны, а также *двойныя касательныя*, т. е. касательныя касающіяся двухъ различныхъ точекъ кривой. Еще Понселе въ этихъ особенностяхъ думалъ найти объясненіе нѣкоторыхъ парадоксовъ, представляемыхъ методомъ взаимныхъ поляръ. Изъ этой теоріи Плюккеръ вывелъ число точекъ перегиба и двойныхъ касательныхъ, соотвѣтствующихъ алгебраической кривой извѣстнаго порядка. Но нахожденіе аналитическимъ путемъ этаго числа представляло непреодолимыя трудности, такъ какъ эти особенности зависили отъ различныхъ свойствъ аналитическихъ уравненій, а также отъ одной изъ самыхъ трудныхъ частей Анализа, именно теоріи эллиминаціи. Вслѣдствіи этихъ причинъ аналитическое изслѣдованіе алгебраическихъ кривыхъ высшихъ порядковъ долгое время оставалось неполнымъ, пока не получилъ окончательнаго своего развитія одинъ изъ новѣйшихъ методовъ Анализа, именно теорія опредѣлителей, о которомъ справедливо сказалъ Сильвестръ: „Теорія опредѣлителей есть примѣненіе Алгебры къ Алгебрѣ; это есть методъ дающій возможность предвидѣть и связать результаты аналитическихъ дѣйствій, такимъ же точно образомъ какъ Алгебра освобождаетъ насъ отъ производства обыкновенныхъ дѣйствій Ариѳметики“ [4]).

---

[1]) *Möbius*, Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Klassen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewandt, von A. F. Möbius, Professor der Astronomie zu Leipzig. Leipzig, 1827, in—8.

[2]) Названіе „Барицентрическое счисленіе“, по словамъ Мёбіуса, онъ ввелъ потому, что методъ этотъ онъ вывелъ изъ началъ центра тяжести. „Предметъ барицентрическаго счисленія суть точки и численные коэфиценты ихъ“, говоритъ Мебіусъ.

[3]) Annales de Mathématiques; T. XVIII, 1827—1828, pag. 320.

[4]) Philos. Mag. Vol. I. 4 th. Ser. 1851, pag. 295.

Изслѣдованія Плюккера нашли также многихъ послѣдователей, изъ числа которыхъ наиболѣе извѣстны нѣмецкіе геометры *Гессе* (1811—1874) и *Клебшъ* (18..—1872). Главная заслуга Гессе заключается въ томъ, что онъ обобщилъ многое въ Аналитической Геометріи, введя въ свои изслѣдованія *опредѣлители*. Занимаясь, на ряду съ геометрическими вопросами, вопросами алгебры Гессе показалъ, какъ при помощи теоріи опредѣлителей можно исключить одно неизвѣстное изъ двухъ уравненій высшихъ степеней. Занимаясь этимъ вопросомъ Гессе далъ нѣсколько важныхъ предложеній, касающихся этого исключенія и приложилъ ихъ къ изслѣдованію кривыхъ 3-го порядка и къ вопросу какъ форму 3-ей степени отъ трехъ перемѣнныхъ привесть къ возможно простой формѣ изъ четырехъ членовъ [1]). Рѣшеніе этого вопроса свелось на опредѣлитель изъ двухъ дифференціальныхъ коэфиціентовъ 3-ей степени, который въ первый разъ былъ введенъ Гессе въ вычисленія. Опредѣлитель этотъ, получившій большое приложеніе въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ различныхъ вопросовъ, получилъ названіе „Гессевскаго опредѣлителя“. Одновременно съ изслѣдованіями Гессе, которыя привели его къ открытію опредѣлителя его имени, англійскій геометръ *Келе* (Cayley) въ 1845 г. [2]) положилъ первыя основы *теоріи инваріантовъ*. Теорія эта получила свое названіе отъ вопроса, изслѣдованіемъ котораго она обязана своимъ возникновеніемъ; вопросъ этотъ слѣдующій: „какъ могутъ быть изъ уравненія кривой выведены уравненія другихъ фигуръ, которыя находились бы съ кривой въ такомъ неизмѣнномъ (invariable) соотношеніи, что ихъ проэкціи неизмѣняются“. Дальнѣйшее развитіе теорія инваріантовъ получила благодаря изслѣдованіямъ многихъ геометровъ, примѣнившихъ ее въ своихъ сочиненіяхъ; изъ числа ихъ мы укажемъ на англичанъ *Сильвестра*, *Салмона* [3]), и германскихъ геометровъ *Клебша* [4]), *Аронгольдта* (Aronholdt), *Гордана* (Gordan) и многихъ другихъ. Далѣе Гессе показалъ, что его опредѣлитель даетъ возможность найти къ каждой кривой другую кривую, связанную съ первой извѣстными условіями. Кривая эта получила впослѣдствіи названіе „кривой Гессе“ [1]). Изъ числа чисто геометрическихъ вопросовъ рѣшенныхъ Гессе укажемъ на слѣдующій: даны 9 точекъ, опредѣляющихъ поверхность втораго порядка, требуется найти 10-ю точку этой поверхности? Вопросъ этотъ былъ предложенъ Брюссельской Академіей въ 1825 году, но долгое время оставался нерѣшеннымъ, пока не было дано рѣшенія Гессе въ 1842 году [2]). Вопросъ этотъ въ геометріи трехъ измѣреній тоже что задача о нахожденіи 6-й точки коническаго сѣченія по даннымъ пяти его точкамъ. Послѣдняя задача, какъ извѣстно, была рѣшена еще Паскалемъ, при помощи его знаменитаго шестиугольника. Рѣшеніе данное Гессе чисто синтетическое. Замѣтимъ здѣсь, что еще ранѣе Гессе, въ 1836 году, Штейнеръ предложилъ два рѣшенія этой задачи.

[1]) *Hesse*, Ueber die Elimination der Var. aus drei alg. Gleichungen vom 2-ten Grad mit zwei Veränderlichen.—Ueber die Wendepunkte der Curve 3. Ordnung. См. Jour. Crell., Bd. XXVIII, 1814, S. 68, 97.

[2]) Изслѣдованія Келе составляютъ предметъ цѣлаго ряда (десяти) мемуаровъ подъ заглавіемъ „Upon Quantics“, напечатанныхъ въ Philosoph. Trans. въ періодъ 1856—79 гг.

[3]) *Salmon*, Treatise on analytic Geometry. London, 1848, in—8. Послѣдующія изданія озаглавлены: *Salmon*, Treatise on Conic Sections. Сочиненіе это выдержало шесть изданій, изъ коихъ послѣднее (6-е) вышло въ 1879 году. Сочиненіе это пользуется вполнѣ заслуженною извѣстностью и переведено почти на всѣ европейскіе языки. Переводъ на русскій языкъ сдѣланъ нами въ 1860 году и намъ принадлежитъ первымъ честь перевода этого сочиненія на иностранный языкъ. Переводъ нашъ озаглавленъ „Коническія Сѣченія“, СПБ. 1860. in—8. Изъ другихъ сочиненій Салмона укажемъ еще Аналитическую Геометрію трехъ измѣреній: *Salmon*, Treatise on the analytic Geometry of three dimensions. Dublin, 1861, in—8 и на его теорію кривыхъ: *Salmon*, Treatise on higher plane curves. Dublin, 1852, in—8. Всѣ эти сочиненія выдержали по нѣсколько изданій и читаются математиками съ пользею и въ настоящее время.

[4]) Изъ сочиненій Клебша наиболѣе извѣстны: *Clebsch*, Vorlesungen über Geometrie. Hrsg. V. Lindemann. Bd. I, Leipzig, 1875, in—8. Существуетъ также французское изданіе этого капитальнаго сочиненія.

Многія интересныя свойства кривыхъ высшихъ порядковъ были изслѣдованы съ аналитической точки зрѣнія италіанскимъ математикомъ *Кремоной*, написавшимъ по этому предмету цѣлый рядъ сочиненій [3]). Дальнѣйшимъ успѣхамъ Аналитической Геометріи также много способствовало введеніе въ изслѣдованіе *однородныхъ* и *трилинейныхъ* координатъ. На дальнѣйшее развитіе Геометріи также оказало не малое вліяніе примѣненіе при геометрическихъ изслѣдованіяхъ трансцендентныхъ функцій. Такое примѣненіе было сдѣлано съ особеннымъ успѣхомъ Клебшемъ въ 1863 году [4]).

На ряду съ синтетической Геометріей возникла еще новая отрасль Геометріи извѣстная подъ именами: „мнимой“, „воображаемой“, „пангеомет-

[1]) Изъ трудовъ Гессе болѣе извѣстны: *Hesse*, Vorlesungen über die Analytische Geometrie des Raums. Leipzig, 1861, in—8.—*Hesse*, Analytische Geometrie der geraden Linie, des Punkts und des Kreises in der Ebene. Leipzig, 1865, in—8. Кромѣ того онъ написалъ еще: „Vier Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie“ (См. Zeitschrift für Mathem. und Physik, Jahrg. XI).—„Sieben Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie der Kegelschnitte“ (См. Zeitsch. f. Math. und Physik, Jahrg. XIX и Jahrg. XXI). Кромѣ того онъ написалъ до 50-ти мемуаровъ по Геометріи.

[2]) *Hesse*, Ueber die Construction der Oberfläche 2. Ordnung, von welchen beliebige 9 Punkte gegeben sind. См. Jour. Crell., Bd. XXIV, 1842, S. 36.

[3]) Главныя изъ его сочиненій: *Cremona*, Introduz. ad una theoria geometr. delle curve piane. Bologna, 1862, in—4. — Preliminari di una teoria geom. delle superficie (di 1 e 2 ord.). Bologna, 1867, in—4.

[4]) *Clebsch*, Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie. См. Jour. Crell., Bd. LXIII, 1863, S. 53.

ріи", „геометріи высшихъ измѣреній", „гипергеометріи" и т. п. Первыя основы этой новой отрасли геометрическаго изслѣдованія, были положены нашимъ соотечественникомъ *Николаемъ Ивановичемъ Лобачевскимъ* (1793—1856), занимавшимъ мѣсто профессора въ Казанскомъ Университетѣ въ періодъ времени между 1816—1856 гг. Систему свою Любачевскій изложилъ въ сочиненіи „Воображаемая Геометрія", напечатанномъ въ 1835 г. [1]). Одновременно съ Лобачевскимъ тѣми же вопросами занимались венгерскіе математики *Болеи, отецъ и сынъ* (1775—1856, 1802—1860). Изслѣдованія Болея—отца были напечатаны въ 1829 и 1851 годахъ, а Болея—сына въ 1833 году [2]). Въ настоящее время „Мнимая Геометрія" и вообще обобщеніе различныхъ геометрическихъ вопросовъ, касающихся пространствъ болѣе трехъ измѣреній, занимаютъ многихъ геометровъ и составляетъ предметъ многочисленныхъ мемуаровъ и изслѣдованій, въ которыхъ трактуется о пространствахъ многихъ измѣреній. Основное свойство или положеніе въ геометріи Лобачевскаго состоитъ въ томъ, что сумма угловъ во всякомъ треугольникѣ менѣе двухъ прямыхъ угловъ. Исходя изъ этого начала онъ доказываетъ много занимательныхъ предложеній. Изъ математиковъ настоящаго времени, занимающихся „Мнимой Геометріей", названной въ послѣднее время также „Неевклидовской", въ отличіе отъ геометріи Евклида, т. е. обыкновенной, входящей въ составъ гимназическаго курса, наиболѣе извѣстны труды: *Бельтрами* [3]), *Клейна* [4]), *Риманна* (1826—1866) [5]), *Фришгауфа* [6]), *Буняковскаго* [7]) и многихъ другихъ [8]). Далѣе геометры обобщили понятіе о пространствѣ трехъ измѣреній и стали разсматривать и изслѣдовать пространства четырехъ, пяти и вообще m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ измѣреній. Конкретное представленіе такихъ пространствъ недоступно нашему пониманію, съ геометрической точки зрѣнія, но съ аналитической вполнѣ возможны и подлежатъ математическимъ изслѣдованіямъ.

[1]) Напечатано въ ученыхъ запискахъ Казанскаго Универ. кн. I, 1835 г., а также въ Journal Crelle, Bd. XVII, 1837. Кромѣ этого сочиненія онъ написалъ нѣсколько другихъ, относящихся къ тому же вопросу, изъ нихъ главное: Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles. Kazan, 1856, in—8.

[2]) Интересное изслѣдованіе Болея—сына переведено на французскій языкъ Гуэлемъ подъ заглавіемъ: La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiôme XI d'Euclide ect., par Jean Bolyai. Paris, 1868, in—8.

[3]) *Beltrami*, Saggio di Interpretazione delle Geometria non Euclidea. Napoli, Giornale di Matematiche, Vol. VI, 1868.

[4]) *Klein*, Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. См. Mathem. Annalen, T. IV, 1871; T. VI, 1873; T. VII, 1874.

[5]) *Riemann*, Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zur Grunde liegen. Habilitationsschrift von 10 Juni 1854. Abhandlungen der Königl. Gesellsch. zu Göttingen, Bd. XIII.

[6]) *Frischauf*, Absolute Geometrie nach I. Bolyai. Leipzig, 1872, in—8. — Elemente der Absoluten Geometrie. Leipzig, 1876, in—8.

[7]) *Bouniakoffsky*, Considérations sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la Géométrie non-euclidienne. См. Mémoires de l'Acad. de St. Petersb., Serie VII, T. XVIII, 1872.

[8]) Основныя начала „Неевклидовской Геометріи" изложены нами въ сочиненіи „Начала Евклида", Кіевъ, 1880, in—8. См. стр. 1—80.

Выходя изъ предѣловъ нашего представленія при помощи Геометріи высшихъ измѣреній рѣшаются вопросы повидимому совершенно невозможные, лишенные здраваго смысла, какъ напр. выворачиваніе вполнѣ замкнутаго тѣла, въ родѣ шара, эллипсоида и т. под.; основывая свои разсужденія на аналогіи и исходя изъ свойствъ тѣлъ трехъ измѣреній многіе геометры, теоремы, имѣющія мѣсто въ нашемъ пространствѣ, обобщили и на пространства высшихъ измѣреній. Въ послѣднее время германскіе геометры *Рудель* [1]) и *Дюрежъ* [2]) изслѣдовали нѣкоторыя свойства тѣлъ болѣе трехъ измѣреній. Дюрежъ показалъ, что для тѣлъ въ пространствѣ четырехъ, пяти, шести и т. д. измѣреній, соотвѣтствующимъ нашимъ многогранникамъ также существуетъ теорема Эйлера, выражающая зависимость между сторонами, ребрами и углами многогранника. Какъ частный случай изъ общей формулы для тѣла n измѣреній онъ выводитъ формулу Эйлера. Американскій математикъ *Нюкомбъ* [3]) рѣшилъ задачу о выворотѣ бочковидной фигуры безъ разрыва или разрѣза частей. Въ послѣднее время извѣстный германскій математикъ *Бальцеръ* въ своей „Аналитической Геометріи" [4]) также ввелъ нѣкоторыя обобщенія, основанныя на введеніе въ геометрическое изслѣдованіе пространства m измѣреній. Но замѣтимъ здѣсь, что выводы Дюрежа основаны только на аналогіи и на обобщеніи извѣстныхъ свойствъ, присущихъ только нашему пространству. Съ аналитической точки зрѣнія такое обобщеніе возможно, но съ геометрической—реальной, такія обобщенія представляютъ несообразность. Въ настоящее время вопросы эти, какъ мы уже замѣтили выше, занимаютъ многихъ геометровъ и представляютъ обширное поле для абстрактнаго мышленія человѣческаго ума.

---

[1]) *Rudel*, Vom Körper höheren Dimensionen. Beiträge zu den Elementen einer n—dimensionalen Geometrie. Kaiserslautern, 1882, in—8.

[2]) *Durège*, Ueber Körper von vier Dimensionen. Sitzb. der k. k. Akad. der Wissenschaften von Wien. Bd. LXXXIII, II Abth., Mai-Heft, Jahrg. 1881.

[3]) *Newcomb*, Note on a class of Transformations which Surfaces may undergo in Space of more than three dimensions. См. American Journal of Mathematic., T. I., pag. 1—4, 1878.

[4]) *R. Baltzer*, Analytische Geometrie. Leipzig, 1882, in—8.

